

# Bayes-Statistik und Statistische Qualitätskontrolle

Harald STRELEC

## 1 Einleitung

Der Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen gewinnt an Akzeptanz und damit an Effizienz, wenn die im Lehrplan vorgeschriebenen Themen um motivierende Anwendungsbeispiele aufgebaut werden können. Für den Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bietet sich in diesem Zusammenhang an Stelle der üblichen Glückspiel- und Würfelbeispiele ("Würfelbudenmathematik") die Statistische Qualitätskontrolle (*SQK*) mit den dort verwendeten Verfahren an.

Obwohl sie der Technischen Statistik zuzurechnen ist und damit eher für die HTL geeignet scheint, sind die Probleme und damit auch die Methoden der *SQK* durchaus allgemein verständlicher Natur und damit auch an AHS mit Erfolg zu vermitteln. Dies umso mehr als es etwa auch für angehende Juristen und Ökonomen nützlich sein kann, vor einer allfälligen ersten "Konfrontation" mit dem Bereich Qualitätssicherung im Rahmen ihrer Berufstätigkeit bereits in der Schule mit diesem Themenbereich in Berührung gekommen zu sein.

In einem eigenen Abschnitt sollen nunmehr die einfachsten Methoden der *SQK* zusammengestellt und zum Teil beispielhaft erläutert werden. Diese Beispiele könnten sich für die direkte Übernahme in den Unterricht eignen und damit Alternativen oder Ergänzungen zu den traditionellen Aufgaben darstellen.

Anders verhält es sich mit dem Bayes-Kalkül. Idee und Methoden stellen eine Bereicherung der klassischen Statistik dar. Manche Vertreter dieser Richtung - hauptsächlich im anglikanischen Sprachraum - sehen die Bayes-Statistik sogar als einzig mögliche und sinnvolle Alternative hierzu an und setzen sich für die Überwindung der traditionellen Statistik mit Hilfe des Bayes-Kalküls vehement ein. Soweit soll es in diesen Ausführungen nicht kommen, vielmehr wird versucht, die nützlichen Aspekte von Bayes-Methoden herauszustreichen und zu vermitteln.

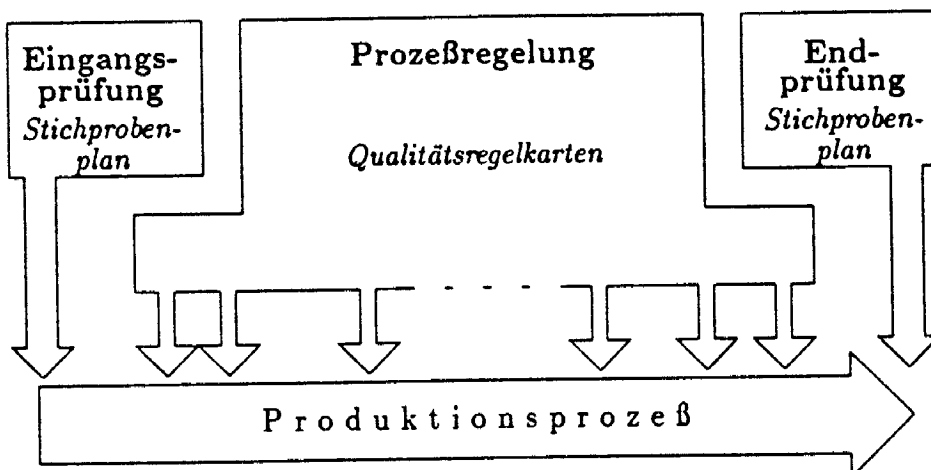
Zwar erscheint es kaum vorstellbar, Bayes-Methoden im AHS-Unterricht konkret zu vermitteln, dennoch ist es denkbar und im Hinblick auf eine zu eigenem Denken und Urteilen anleitende Ausbildung auch wünschenswert, die Ideen des Bayes-Ansatzes zu vermitteln. Fallweise ließen sich einfache Beispiele dazu auch direkt in den Unterricht übernehmen.

Einer der folgenden Abschnitte wird die wesentlichen Begriffe und Ansätze des Bayes-Kalküls behandeln, während ein weiteres Kapitel Einsatzmöglichkeiten für Bayes-Methoden in der Statistischen Qualitätskontrolle näherbringen soll.

## 2 Einführung in die Statistische Qualitätskontrolle

Die Statistische Qualitätskontrolle umfaßt die statistischen Modelle und Methoden, die als Hilfsmittel in der betrieblichen Qualitätssicherung zum Einsatz kommen. Stellt man sich den Produktionsprozeß schematisch als Fließband vor, so ergeben sich folgende Punkte, an denen Aktionen zur Qualitätsüberwachung gesetzt werden (vgl. Abb. 1):

Abbildung 1: *Produktionsprozeß und Aktionen zur Qualitätssicherung*



- Zu Beginn des Produktionsprozesses muß sichergestellt werden, daß qualitativ entsprechende Vorprodukte (Rohstoffe, Halbfabrikate, Module u.ä.) verarbeitet werden; bei minderentsprechenden Eingangsmaterialien würde der beste Prozeßablauf nichts nützen, um letztendlich die geforderte Produktqualität zu erzielen.
- Während des Prozesses ist an qualitätsentscheidenden Abschnitten laufend zu überprüfen, ob die (optimale) Prozesseinstellung konstant bleibt, oder eine Veränderung einen Eingriff in den Prozeß samt allfälliger Neueinstellung oder gar Reparatur notwendig macht.
- Schließlich erfolgt am Ende des Produktionsprozesses eine abschließende Überprüfung des fertigen Produktes hinsichtlich der seitens des Kunden formulierten Qualitätsanforderungen.

Die Prüfung selbst wird aus ökonomischen und/oder technischen Gründen (Prüfkosten, zerstörende Prüfung) in der Regel als Stichprobenprüfung erfolgen. Dazu stehen in erster Linie

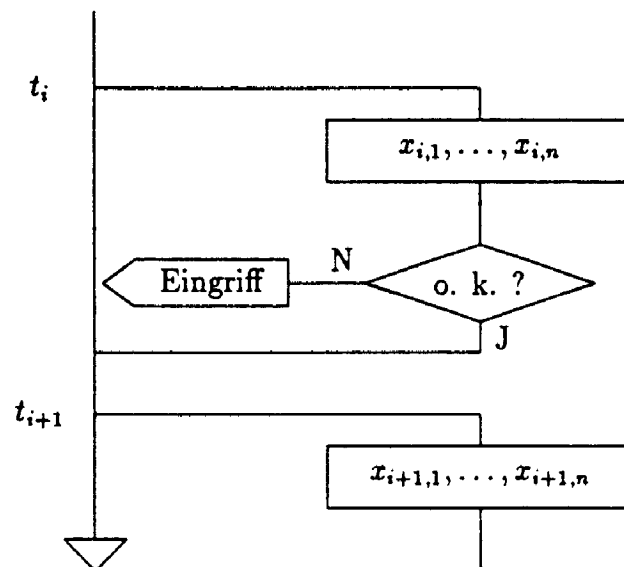
- *Qualitätsregelkarten* (Prozeßregelung)
- *Stichprobenpläne* (Losprüfung in der Eingangs- und Ausgangskontrolle)

zur Verfügung. Nebenbei gibt es für spezielle Situationen eine Reihe von Modifikationen und Ergänzungen dieser Basismethoden. Die folgenden Erläuterungen beschränken sich aber auf diese Grundversionen in einfachster Form. Eine ausführliche Beschreibung von Methoden der *SQK* findet man bei Uhlmann (1982).

## 2.1 Qualitätsregelkarten

Das Prinzip der Qualitätsregelkarten besteht in der Beobachtung eines (oder auch mehrerer) qualitätsrelevanten Merkmals  $X$  an einem bestimmten Punkt des Produktionsprozesses. Dabei werden zu vorgegebenen Zeiten  $t_i$  i.a. sehr kleine Stichproben  $(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$  unmittelbar aus dem Produktionsprozeß entnommen und hinsichtlich dieses Merkmals untersucht. Die gewonnenen Daten (*Urwertkarte*) bzw. davon abgeleitete Größen (*Shewhartkarte*) werden chronologisch in die Qualitätsregelkarte eingetragen und mit vorgegebenen Eingriffsgrenzen (*Kontrollgrenzen*) verglichen. Für den Fall, daß diese überschritten werden, muß der Produktionsprozeß für Überprüfungs- und/oder Reparaturzwecke unterbrochen werden. Das Schema dieses Prinzips ist in Abb. 2 dargestellt.

Abbildung 2: Prüfablauf mit Qualitätsregelkarten



Üblicherweise sind die Prozeßparameter (Mittelwert, Standardabweichung) in Bezug auf das zu beobachtende Qualitätsmerkmal nicht bekannt und müssen aus einem *Vorlauf* geschätzt werden. Dieser besteht aus einer kontinuierlichen Folge

von Stichproben, die dem Schema der Qualitätsregelkarte entsprechend gewählt werden

$$\begin{array}{cccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,n} \end{array} ,$$

wobei für die Anzahl  $m$  als Faustregel  $20 \leq m \leq 30$  verwendet wird. Daraus erhält man Stichprobenmittel

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

und Stichprobenvarianz

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

für  $i = 1, \dots, m$  und schließlich

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

als (sehr präzise) Schätzung für die Prozeßlage (Mittelwert), sowie

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2}$$

als Schätzung für die Prozeßstreuung (Standardabweichung). Diese Schätzungen werden üblicherweise der Konstruktion von Qualitätsregelkarten zugrundegelegt.

*Beispiel 2.1:* Tabelle 1 enthält einen Vorlauf mit  $m = 20$  Stichproben vom Umfang  $n = 5$  für die Federkraft (in  $p$ ) von Spiralfedern. Gesucht sind  $\bar{\bar{x}}$  und  $\bar{s}$ .  
Lösung: man erhält unter Ausnützung von Tab. 1

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= 9.505 \\ \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} s_i^2 &= 0.0020385 \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = 0.0451 \end{aligned} .$$

Für eine grobe Einteilung der Methoden unterscheidet man *Einzel-* oder *Urwertkarten*, bei denen die beobachteten Stichprobenwerte direkt in die Qualitätsregelkarte eingetragen werden, und *Shewhartkarten*, bei denen eine aus der Stichprobe abgeleitete (und damit berechnete) Kenngröße beurteilt wird. Der Vorteil der Einzelwertkarte ist die einfachere Handhabung (kein Rechenvorgang!), während die Shewhartkarte die höhere Aussageschärfe besitzt.

Die Festlegung der *Kontroll-* oder *Eingriffsgrenzen* erfolgt so, daß die Wahrscheinlichkeit eines unnötigen Prozeßeingriffes sehr klein ist (üblicherweise 1%). Im Falle eines *normalverteilten* Qualitätsmerkmals mit den Prozeßparametern  $\mu_0$

Tabelle 1: Vorlauf

i	Stichprobe					$\bar{x}_i$	$s_i^2$	$s_i$
	$x_{i,1}$	$x_{i,2}$	$x_{i,3}$	$x_{i,4}$	$x_{i,5}$			
1	9.51	9.53	9.39	9.56	9.53	9.504	0.00438	0.0662
2	9.47	9.47	9.50	9.46	9.48	9.476	0.00023	0.0152
3	9.49	9.54	9.57	9.52	9.47	9.518	0.00157	0.0396
4	9.50	9.54	9.46	9.60	9.50	9.520	0.00280	0.0529
5	9.53	9.51	9.50	9.47	9.51	9.504	0.00048	0.0219
6	9.55	9.52	9.50	9.50	9.54	9.522	0.00052	0.0228
7	9.51	9.53	9.52	9.50	9.55	9.522	0.00037	0.0192
8	9.46	9.51	9.50	9.54	9.50	9.502	0.00082	0.0286
9	9.47	9.54	9.47	9.45	9.62	9.510	0.00495	0.0704
10	9.49	9.45	9.52	9.52	9.54	9.504	0.00123	0.0351
11	9.52	9.51	9.51	9.38	9.56	9.496	0.00463	0.0680
12	9.50	9.41	9.53	9.46	9.56	9.492	0.00547	0.0589
13	9.57	9.49	9.47	9.50	9.47	9.500	0.00170	0.0412
14	9.50	9.45	9.50	9.49	9.40	9.468	0.00187	0.0432
15	9.50	9.52	9.50	9.53	9.51	9.512	0.00017	0.0130
16	9.58	9.52	9.51	9.48	9.53	9.524	0.00133	0.0365
17	9.44	9.58	9.53	9.55	9.51	9.522	0.00277	0.0526
18	9.53	9.59	9.56	9.54	9.52	9.548	0.00077	0.0277
19	9.42	9.54	9.46	9.53	9.48	9.486	0.00248	0.0498
20	9.37	9.46	9.49	9.46	9.55	9.466	0.00423	0.0650

und  $\sigma_0$ , also  $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ , erhält man symmetrische Kontrollgrenzen  $k_U$  und  $k_O$  über

$$\begin{aligned}
 0.99 &= \Pr(\text{"alle Beobachtungen innerhalb der Kontrollgrenzen"}) \\
 &= \Pr(k_U \leq X_1, \dots, X_n \leq k_O) \\
 &= \prod_{j=1}^n \Pr(k_U \leq X_j \leq k_O) \quad (\text{Unabhängigkeit der Stichprobe!}) \\
 &= \left[ \Phi\left(\frac{k_O - \mu_0}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(\frac{k_U - \mu_0}{\sigma_0}\right) \right]^n = \left[ 2\Phi\left(\frac{k_O - \mu_0}{\sigma_0}\right) - 1 \right]^n
 \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{k_O - \mu_0}{\sigma_0} = u_{(1 + \sqrt{0.99})/2} =: u_{(k)}$$

als

$$\begin{aligned}
 k_O &= \mu_0 + u_{(k)}\sigma_0 \\
 k_U &= \mu_0 - u_{(k)}\sigma_0
 \end{aligned}$$

Dabei steht  $u_p$  mit  $\Phi(u_p) = p$  für das  $p$ -Quantil der Standardnormalverteilung. Da die exakten Prozeßparameter im allgemeinen nicht bekannt sind, werden sie durch die (meist sehr genauen) Vorlaufschätzungen ersetzt.

*Beispiel 2.2:* Mit Hilfe des Vorlaufs aus Tab.1 soll eine Einzelwertkarte konstruiert werden.

Lösung: wir haben

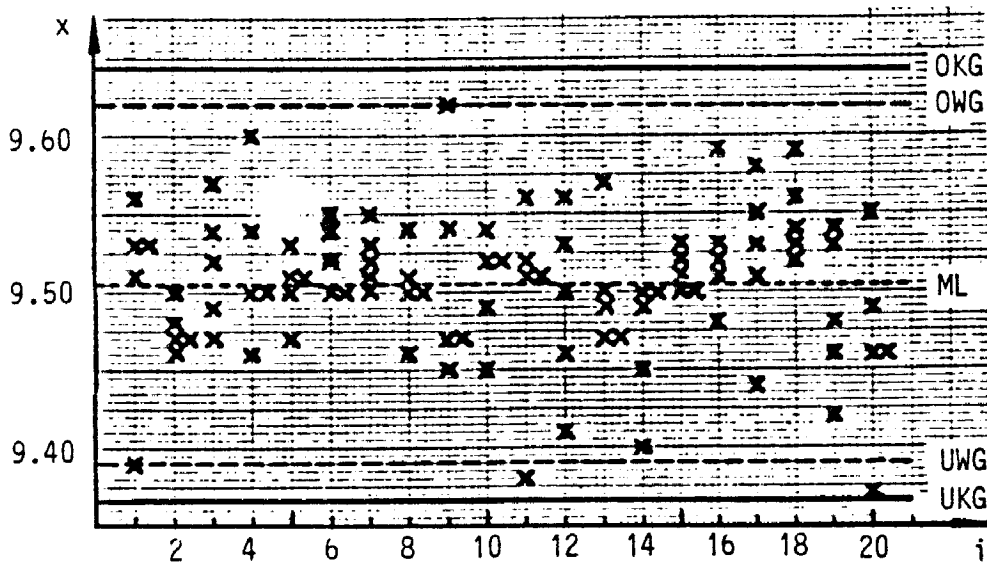
$$\frac{1 + \sqrt[3]{0.99}}{2} = 0.999 \quad \text{und} \quad u_{0.999} = 3.085 \quad ,$$

sodaß

$$\begin{aligned} k_O &= 9.505 + 3.085 \times 0.0451 = 9.644 \\ k_U &= 9.505 - 3.085 \times 0.0451 = 9.366 \end{aligned}$$

die gesuchten Kontrollgrenzen darstellen. Abbildung 3 zeigt die Einzelwertkarte mit dem eingetragenen Vorlauf.

Abbildung 3: Einzelwertkarte



Als Beispiel einer Shewhartkarte soll eine sogenannte *Mittelwertkarte* dienen, bei der das Stichprobenmittel beurteilt wird. Liegt abermals ein normalverteiltes Merkmal zugrunde, so ergeben sich symmetrisch liegende Kontrollgrenzen  $k_{\bar{x};U}$  und  $k_{\bar{x};O}$  zu

$$\begin{aligned} k_{\bar{x};O} &= \mu_0 + u_{0.995} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ k_{\bar{x};U} &= \mu_0 - u_{0.995} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad , \end{aligned}$$

da das Stichprobenmittel in diesem Fall  $N(\mu_0, \sigma_0^2/n)$ -verteilt ist.

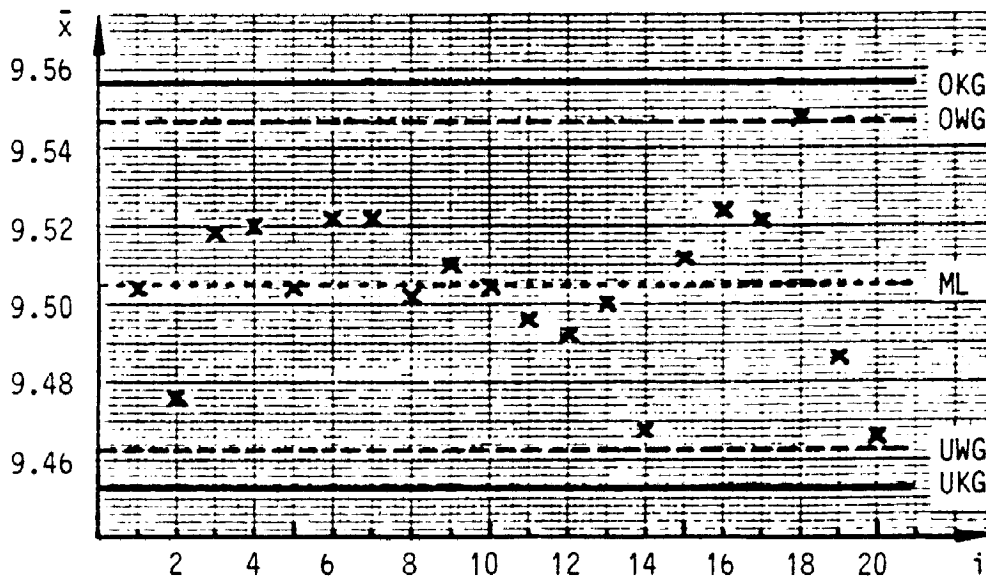
*Beispiel 2.3:* Analog zu Bsp. 2.2 soll zum selben Vorlauf nunmehr eine  $\bar{x}$ -Karte erstellt werden.

Lösung: wir haben  $u_{0.995} = 2.575$  und erhalten daher

$$\begin{aligned} k_{\bar{x};O} &= 9.505 + 2.575 \times 0.0451/\sqrt{5} = 9.557 \\ k_{\bar{x};U} &= 9.505 - 2.575 \times 0.0451/\sqrt{5} = 9.453 \end{aligned}$$

als Kontrollgrenzen. Die Abb. 4 zeigt die zugehörige  $\bar{x}$ -Karte mit dem eingetragenen Vorlauf.

Abbildung 4:  $\bar{x}$ -Karte



Zu allen Qualitätsregelkarten lassen sich auch *Warngrenzen* einführen, die analog den Kontrollgrenzen ermittelt werden, wobei das Risiko eines Fehleingriffs aber erhöht wird (üblicherweise von 1% auf 5%). Dadurch liegen die Warngrenzen enger, werden damit eher überschritten und sollen im Überschreitungsfall zu erhöhter Aufmerksamkeit führen.

Schließlich muß darauf hingewiesen werden, daß hier das Thema Qualitätsregelkarten nur angerissen wurde und eine Vielzahl weiterer (und komplexerer) Möglichkeiten bekannt und verbreitet sind.

## 2.2 Stichprobenpläne

In der statistischen Qualitätsprüfung stellen Stichprobenpläne Verfahrensvorschriften dar, mit deren Hilfe vorgestellte Lose hinsichtlich ihrer Qualität (d.h. im wesentlichen Ausschußanteil) beurteilt werden. Lose sind dabei organisatorisch bedingte Zusammenfassungen von Produktionseinheiten wie z.B. Verpackungseinheiten (Kisten, Paletten), Transporteinheiten (Container) oder ähnliches. Ein Stichprobenplan gibt im wesentlichen den Prüfumfang und eine Entscheidungsregel an. Die Prüfung erfolgt nun, indem eine Stichprobe mit dem angegebenen Umfang aus dem zu beurteilenden Los (in zufälliger Weise!) entnommen wird. Danach folgt auf Grund des Stichprobenergebnisses die Beurteilung des gesamten Loses gemäß der im Stichprobenplan festgelegten Entscheidungsregel (Annahme, Ablehnung, spezielle Verwertung o.ä.).

Für die normale *Gut-/Schlechtprüfung* (Glühlampe: leuchtet/leuchtet nicht, Transistor: funktioniert/funktioniert nicht, Milchpackung: gut/verdorben u.ä.) stellt ein *einfacher (n, c)-Plan* die naheliegendste Form einer Stichprobenvorschrift dar. Ein vorgestelltes Los wird dabei als gut (= entsprechend) *angenommen*, wenn die Gesamtzahl von Ausschubeinheiten in einer dem Los entnommenen Stichprobe vom *Umfang n* die *Annahmezahl c* nicht übersteigt. Das Schema lautet somit:

- Entnahme einer Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  vom Umfang  $n$  aus einem vorgestellten Los vom Umfang  $N$ ; dabei ist

$$x_i = \begin{cases} 0 & i\text{-te Prüfeinheit in Ordnung} \\ 1 & i\text{-te Prüfeinheit Ausschub} \end{cases}$$

und somit

$$X_i \sim A(p)$$

also alternativverteilt, wobei  $p$  für den *Ausschußanteil* im Los steht.

- Mit  $y = \sum_{i=1}^n x_i$  lautet die Losentscheidung

$$y \begin{cases} \leq \\ > \end{cases} c \Rightarrow \begin{cases} \text{Losannahme} \\ \text{Losablehnung} \end{cases} .$$

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Auswahl und den Vergleich von Stichprobenplänen ist die *Annahmekennkurve* (oder auch *Operationscharakteristik, OC-Kurve*)

$$L_{n,c}(p) = \Pr(\text{"Losannahme"}|p) \quad \text{für } 0 \leq p \leq 1 ,$$

die in Abhängigkeit vom Ausschußanteil  $p$  die Annahmewahrscheinlichkeit eines vorgestellten Loses bei Anwendung eben dieses Stichprobenplanes angibt. Wenn der Stichprobenanteil  $n/N$  klein genug ist (Faustregel:  $n/N \leq 0.1$ ), folgt  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  annähernd einer Binomialverteilung  $Bi(n, p)$  (exakt: hypergeometrische Verteilung), sodaß

$$\begin{aligned} L_{n,c}(p) &= \Pr(Y \leq c|p) = \sum_{l=0}^c \Pr(Y = l|p) \\ &= \sum_{l=0}^c \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \quad \text{für } 0 \leq p \leq 1 . \end{aligned}$$

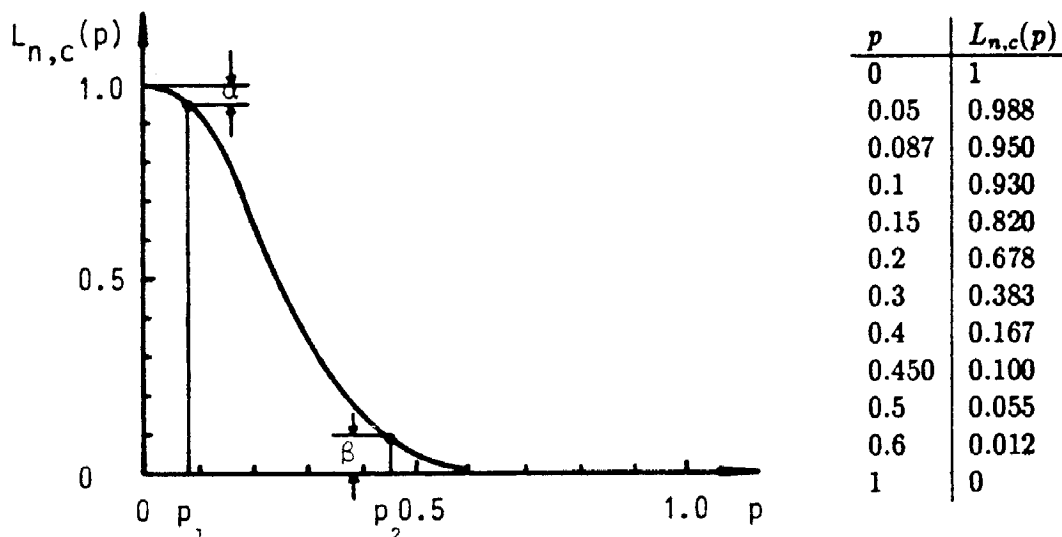
Offensichtlich gilt  $0 \leq L_{n,c}(p) \leq 1$  mit  $L_{n,c}(0) = 1$  und  $L_{n,c}(1) = 0$ .

Die Abbildung 5 zeigt zu den Angaben aus Bsp. 2.4 den Verlauf einer OC-Kurve. Die darin hervorgehobenen Punkte  $(p_1, 1 - \alpha)$  und  $(p_2, \beta)$  dienen häufig als Auswahlkriterium für Stichprobenpläne:

- Lose mit *sehr guter* Qualität, d.h. einem Ausschußanteil höchstens gleich der *Gutgrenze* (AQL-Wert)  $p_1$ , sollen nach Möglichkeit angenommen bzw. höchstens mit der (kleinen) Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  (*Produzentenrisiko*; übliche Werte: 1%, 5%) irrtümlich als schlecht abgelehnt werden.



- Lose mit *sehr schlechter* Qualität, d.h. einem Ausschußanteil über der *Schlechtgrenze* ( $LQ$ -Wert)  $p_2$ , sollen möglichst abgelehnt bzw. höchstens mit der (kleinen) Wahrscheinlichkeit  $\beta$  (*Konsumentenrisiko*; meistens 5%, 10%) irrtümlich angenommen werden.

Abbildung 5: OC-Kurve eines  $(n, c)$ -Planes

*Beispiel 2.4:* Ein Los vom Umfang  $N = 200$  soll mit Hilfe eines  $(n, c)$ -Planes zur Gut-/Schlechtprüfung beurteilt werden, wobei  $n = 10$  und  $c = 2$  gewählt sind. Gesucht sind a) die OC-Kurve, b) die Gutgrenze zum Produzentenrisiko  $\alpha = 5\%$  und c) die Schlechtgrenze zum Konsumentenrisiko  $\beta = 10\%$ .

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 L_{10,2}(p) &= \sum_{l=0}^2 \binom{10}{l} p^l (1-p)^{10-l} \\
 &= (1-p)^{10} + 10p(1-p)^9 + 45p^2(1-p)^8 \\
 &= (1-p)^8(1 + 8p + 36p^2)
 \end{aligned}$$

Die Tabelle in Abb. 5 zeigt die numerische Auswertung, wobei Gut- und Schlechtgrenze unter Verwendung des Newton- oder des Regula Falsi-Verfahrens erhalten werden.

In ähnlicher Weise kann man bei Losprüfungen vorgehen, wo die *Fehleranzahl je Einheit* als Qualitätskriterium betrachtet wird (z.B. Lackierungsfehler an einem Auto, Isolationsfehler auf einer Kabeltrommel, Druckfehler auf einer Buchseite). Das vorige Schema kann einfach übertragen werden, bloß gilt nunmehr

$$X_i \sim Po(\mu) \quad \text{und} \quad Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim Po(n\mu) ,$$

d.h. es wird die Anzahl von Fehlern je Prüfeinheit als Poisson-verteilt angenommen, wobei  $\mu$  für die *durchschnittliche Fehleranzahl je Einheit* im vorgestellten

Los steht. Damit ergibt sich die *OC*-Kurve eines Einfachstichprobenplanes bei Fehlerprüfung zu

$$\begin{aligned} L_{n,c}(\mu) &= \Pr(Y \leq c|\mu) = \sum_{l=0}^c \Pr(Y = l|\mu) \\ &= \sum_{l=0}^c \frac{(n\mu)^l e^{-n\mu}}{l!} \end{aligned}$$

*AQL*- und *LQ*-Wert werden analog zur Gut-/Schlechtprüfung eingeführt.

*Beispiel 2.5:* Ein Los vom Umfang  $N = 50$  wird einer Fehlerprüfung mit Hilfe eines  $(n, c)$ -Planes unterworfen, wobei  $n = 5$  und  $c = 2$  gewählt sind. Die Fragestellung lautet analog zu Bsp. 2.4.

Lösung: man erhält die *OC*-Kurve als

$$\begin{aligned} L_{5,2}(\mu) &= \sum_{l=0}^2 \frac{(5\mu)^l e^{-5\mu}}{l!} \\ &= e^{-5\mu} \left[ 1 + 5\mu + \frac{25\mu^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$\mu$	$L_{n,c}(\mu)$
0	1
0.1	0.986
0.164	0.950
0.2	0.920
0.3	0.809
0.5	0.544
0.7	0.321
1.0	0.125
1.064	0.100
1.5	0.020
2.0	0.003

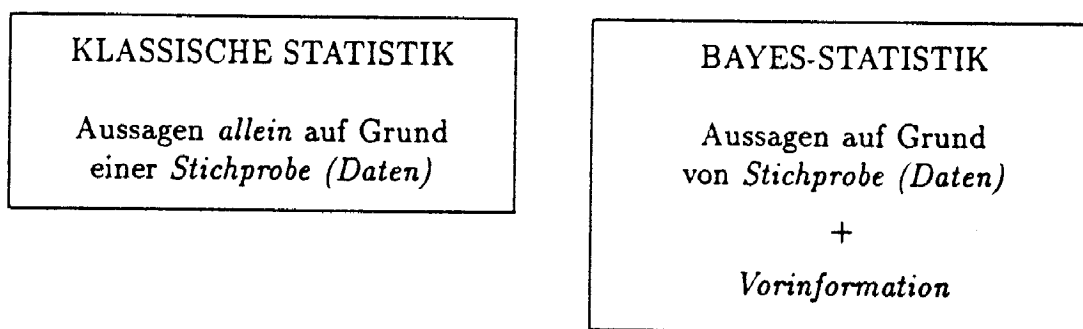
Die nebenstehende Tabelle zeigt die numerische Auswertung.

### 3 Einführung in die Bayes-Statistik

Der Sinn jeder statistischen Analyse liegt in der Beschreibung unserer realen Umwelt, sei sie physisch greifbar (Länge, Gewicht, Anzahl u.ä.) oder geistig erfassbar (Soziologie, Ökonomie). Häufig wird dabei auf mehr oder weniger gut passende Modelle zurückgegriffen, wobei immer deren Gültigkeitsbereich zu beachten ist. Neben der Adäquatheit derartiger Modelle an sich tragen Parameter, die geeignet zu wählen sind, zur Anpassung an die reale Umwelt bei. Die Palette derartiger Parameter ist breit, wobei durchschnittliche Länge, Durchschnittszeit, Maximalkraft, Ausschußanteil, durchschnittliche Fehleranzahl, Lieferant, Gruppenzugehörigkeit u.ä.m. als willkürlich herausgegriffene Beispiele dienen können.

Der Hauptunterschied zwischen dem klassischen und dem Bayes-Kalkül in der Statistik liegt nun in der Kenntnis um die vorhin genannten Parameter. Während in der klassischen Statistik Parameter als *feste*, aber *unbekannte* Größen aufgefaßt werden, geht die Bayes-Statistik von *zufallsbeeinflussten* Parametern ( $\rightarrow$  Zufallsgröße) aus, über die *zum Zeitpunkt der Analyse* mehr oder weniger große Kenntnis vorhanden ist (*Vorinformation*). Diese wird durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für diese Parameter, die sogenannte *a-priori-Verteilung* (weil *vor* der statistischen Analyse), ausgedrückt.

Gleichgültig welchen Kalkül man verfolgt, liegt der statistischen Analyse ein (zufallsbeeinflusstes) *Merkmal*  $X$  zugrunde, dessen *Verteilung* i.a. von den erwähnten Parametern abhängt. Beispiele dafür sind der Durchmesser von bestimmten Lagerbohrungen, der etwa als  $N(\mu, \sigma^2)$ -normalverteilt angenommen wird, oder die Untersuchung auf Ausschuß, bei der eine  $A(p)$ -Alternativverteilung vorliegt. Ziel ist in jedem Fall, Aussagen über die zugrundeliegenden Parameter zu treffen. Hierzu bedient man sich beobachteter *Stichproben* ("Daten")  $D = (x_1, \dots, x_n)$  über das betreffende Merkmal. Im Unterschied zur klassischen Statistik erfolgt nun die Aussage über die relevanten Parameter nicht bloß auf Grund der beobachteten Stichprobe, sondern unter Ausnützung der zur Verfügung stehenden *Vorinformation* über die Parameter:



*Beispiel 3.1:* Eine Elektronikwerkstätte bezieht häufig verwendete Transistoren eines bestimmten Typs von drei Lieferanten und lagert sie in gleichartigen Schachteln, sodaß man einem Transistor seine Herkunft nicht unmittelbar ansehen kann. Die Lieferqualität der einzelnen Hersteller ist mehr oder weniger bekannt, und zwar gilt für die Ausschußanteile  $p_A = 1\%$ ,  $p_B = 0.5\%$  und  $p_C = 0.4\%$ . Beim Einbau eines Transistors stellt sich heraus, daß er defekt ist. Von welcher Firma stammt dieser defekte Transistor?

Klassische Statistik: Wegen

$$\Pr(\text{"Ausschuß"}|A) > \Pr(\text{"Ausschuß"}|B) > \Pr(\text{"Ausschuß"}|C)$$

scheint es am einleuchtendsten, daß der defekte Transistor von Firma  $A$  kommt ( $\rightarrow$  "Likelihood-Prinzip").

Bayes-Statistik: der Bayes-Statistiker nützt die Kenntnis aus, daß die Lieferquote zwischen den drei Firmen  $A : B : C = 1 : 3 : 6$  beträgt. Das ist die *Vorinformation*, eingegossen in die angegebene Dreipunktverteilung. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \Pr(A|\text{"Ausschuß"}) &= \frac{\Pr(A \wedge \text{"Ausschuß"})}{\Pr(\text{"Ausschuß"})} \\ &= \frac{\Pr(\text{"Ausschuß"}|A) \times \Pr(A)}{\sum_{F \in \{A, B, C\}} \Pr(\text{"Ausschuß"}|F) \times \Pr(F)} \end{aligned}$$

Bayes'sche Formel

und analog für die anderen beiden Firmen, was zu den in der nachfolgenden Aufstellung ersichtlichen *a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten* führt:

$F$	$\Pr(F   \text{"Ausschuß"})$
$A$	$0.2 = 0.01 \times 0.1 / (0.01 \times 0.1 + 0.005 \times 0.3 + 0.004 \times 0.6)$
$B$	0.3
$C$	0.5

Damit ist für den Bayes-Statistiker die Herkunft des defekten Transistors aus der Firma  $C$  am naheliegendsten. Es schlägt somit in diesem Fall von den beiden Einflüssen die Vorinformation (d.h. Lieferquote) stärker durch als das Stichprobenergebnis (d.h. Ausschusseinheit).

In allgemeiner Form lautet das Bayes-Prinzip nun folgendermaßen:

- Für das betrachtete Merkmal  $X$  ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte (bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskreten Merkmalen)  $f(x|\theta)$  gegeben, die von einem (ein- oder mehrdimensionalen) Parameter  $\theta$  abhängt.
- Dieser Parameter wird als Zufallsgröße  $\tilde{\theta}$  aufgefaßt und die vorhandene *Vorinformation* in Form einer *a-priori-Dichte* (bzw. a-priori-Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskretem Parameter)  $\pi(\theta)$  zusammengefaßt.
- Eine *Stichprobe*  $D = (x_1, \dots, x_n)$  über das Merkmal  $X$  wird beobachtet und liefert die *Likelihood-Funktion*

$$l(D|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad ,$$

die quasi die Chance darstellt, genau diese Stichprobe zu beobachten.

- Schließlich erhält man mit Hilfe des *Bayes'schen Theorems* die *a-posteriori-Dichte*

$$\pi(\theta|D) = \frac{l(D|\theta) \cdot \pi(\theta)}{\int_{\Theta} l(D|\theta) \cdot \pi(\theta) d\theta} \propto l(D|\theta) \cdot \pi(\theta) \quad ,$$

wobei  $\Theta$  den Parameterraum darstellt. Damit läßt sich der aktuelle Informationsstand über den Parameter  $\theta$  nach Analyse einer Stichprobe beschreiben. Die letzte Beziehung gibt nur das Verhältnis an und läßt den konstanten Nennerterm unberücksichtigt, da sich dieser auch aus der Normierungsbedingung  $\int_{\Theta} \pi(\theta|D) d\theta = 1$  ergibt.

Die zwei Säulen der schließenden Statistik sind bekanntlich das *Schätzen* von Parametern und das *Testen* von Hypothesen (Behauptungen) über dieselben. Im Bayes-Kalkül geht man dazu von der erhaltenen a-posteriori-Verteilung über die Parameter aus. Im folgenden seien die Methoden nur kurz angerissen.

**Bayes-Schätzung:**

Ein naheliegender Schätzwert  $\hat{\theta}$  für einen betrachteten Parameter  $\theta$  auf Grundlage der a-priori-Verteilung ist der Erwartungswert

$$\hat{\theta} = E(\hat{\theta}|D) = \int_{\Theta} \theta f(\theta|D) d\theta$$

bezüglich der a-posteriori-Verteilung. Natürlich sind andere Kenngrößen zur Beschreibung der Lage von  $\hat{\theta}$  auch als Schätzungen geeignet (z.B. Median).

*Beispiel 3.2:* Über den Ausschußanteil  $p$  in Lieferlosen ist auf Grund ausführlicher Lieferantenaufzeichnungen bekannt, daß er annähernd einer  $B(\lambda, \mu)$ -Verteilung, also einer Beta-Verteilung mit Parametern  $\lambda$  und  $\mu$

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\lambda + \mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} p^{\lambda-1}(1-p)^{\mu-1} \quad \text{für } 0 \leq p \leq 1 \quad ,$$

folgt, wobei  $\lambda = 10$  und  $\mu = 990$  gilt. Damit hat man als a-priori-„Schätzung“ für den Ausschußanteil  $p$

$$E(\bar{p}) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0.01 \quad .$$

Bei einer Gut-/Schlechtprüfung fällt nun eine Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  an, deren Likelihood-Funktion sich zu

$$l(x_1, \dots, x_n|p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \times (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

ergibt. Daraus folgt für die a-posteriori-Dichte von  $\bar{p}$

$$\begin{aligned} \pi(p|D) &\propto l(x_1, \dots, x_n|p) \times \pi(p) \\ &= \text{const} \times p^{\sum_{i=1}^n x_i + \lambda - 1} \times (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i + \mu - 1} \quad , \end{aligned}$$

womit für die a-posteriori-Verteilung wieder eine Beta-Verteilung vorliegt mit den neuen Parametern

$$\lambda_{\text{neu}} = \sum_{i=1}^n x_i + \lambda \quad \text{und} \quad \mu_{\text{neu}} = n - \sum_{i=1}^n x_i + \mu \quad .$$

Bei einer Stichprobe vom Umfang  $n = 10$  und zwei entdeckten Ausschüßeinheiten ergibt sich somit der Bayes-Schätzwert für  $p$  zu

$$\hat{p} = \frac{2 + 10}{(2 + 10) + (8 + 990)} = 0.0120 \quad .$$

**Bayes-Test:**

Wie aus der klassischen Statistik gewöhnt, liegt einem Test eine Nullhypothese  $H_0 \subset \Theta$  und eine Alternativhypothese  $H_1 = H_0^c \subset \Theta$  zugrunde. Im Gegensatz zur klassischen Statistik sind diese aber gleichwertig und werden i.a. gleich behandelt.

Im Bayes-Kalkül erfolgt eine Entscheidung unter Ausnützung der a-posteriori-Verteilung (= aktueller Erkenntnisstand) über die Parameter so, daß diejenige Hypothese angenommen wird, der die größere a-posteriori-Wahrscheinlichkeit zukommt:

$$\frac{\Pr(H_0|D)}{\Pr(H_1|D)} = \frac{\int_{H_0} \pi(\theta|D) d\theta}{\int_{H_1} \pi(\theta|D) d\theta} \quad \begin{cases} > 1 & H_0 \text{ annehmen} \\ \leq 1 & H_0 \text{ ablehnen} . \end{cases}$$

*Beispiel 3.3:* Im Anschluß an Bsp. 3.2 ist die Hypothese  $\{p \leq p_0 = 0.01\}$  zu beurteilen. Unter Ausnützung der dort abgeleiteten a-posteriori-Verteilung erhält man

$$\Pr(H_0|D) = \int_0^{0.01} \frac{\Gamma(1010)}{\Gamma(12)\Gamma(998)} p^{11}(1-p)^{997} dp = 0.31298 \quad ,$$

sodaß die Nullhypothese abzulehnen ist.

An Stelle des eben beschriebenen Testprinzips wird aber bei der Anwendung des Bayes-Kalküls häufig ein entscheidungstheoretischer Ansatz unter Ausnützung einer entsprechenden Verlust-, Kosten- oder Nutzenfunktion verfolgt. Einen kleinen Einblick vermittelt das folgende Kapitel.

## 4 Bayes-Ansätze in der Qualitätskontrolle

Zur Verdeutlichung der Sinnhaftigkeit von Bayes-Methoden in der *SQK* dient eine Aufstellung einiger wesentlicher Kostenanteile, die im Rahmen der Qualitätsprüfung anfallen. So unterscheidet man etwa bei der Losprüfung:

- *Prüfkosten.*  
Sie fallen durch den eigentlichen Prüfvorgang an und setzen sich meist aus einem *Fixanteil* (Labor, Personal) und einem zum Prüfumfang *proportionalen* Anteil (Produktwert, Arbeitszeit, Prüfmittel) zusammen.
- *Kosten für irrtümliche Losablehnung.*  
Sie treten auf, wenn ein gutes Los auf Grund der Prüfung (d.h. auf Grund einer "unglücklichen" Stichprobe) zurückgewiesen werden muß, und umfassen zumindest den Produktwert der im verworfenen Los enthaltenen (guten) Einheiten, sowie allfällige Handhabungskosten bei der Weiterverwertung eines abgelehnten Loses (z.B. Totalprüfung). Außerdem kann entgangener Gewinn miteingerechnet werden.
- *Kosten für irrtümliche Losannahme.*  
Diese fallen an, wenn ein nicht entsprechendes Los auf Grund einer "glücklichen" Stichprobe angenommen wird, und enthalten i.a. hohe Haftungs- und Garantiekosten. Möglicherweise kann auch die Auswirkung einer allfälligen Rufminderung quantifiziert und damit miteinbezogen werden.

Offensichtlich stehen Prüfkosten und Fehlentscheidungskosten in einem entgegengesetzten Verhältnis zueinander. Je höher der Prüfaufwand ist, umso schärfer lassen

sich Entscheidungen treffen und umso geringer sind daher Fehlentscheidungskosten und umgekehrt. Daher gilt es, ein ausgewogenes Verhältnis zwischen Prüfaufwand ( $\rightarrow$  Aussageschärfe) und Risiko zu suchen, und es ist Aufgabe der betrieblichen Qualitätssicherung, Prüfumfang und Entscheidungsregeln so zu wählen, daß die Kosten in einem bestimmten Sinn minimal ausfallen. Die zugrundeliegenden Kriterien sind dabei aber sehr unterschiedlich, wie anhand der im folgenden beschriebenen Situation deutlich wird.

Für einen einfachen  $(n, c)$ -Stichprobenplan zur Gut-/Schlechtprüfung fallen i.a. Prüfkosten

$$K_{Pr}(n) = d_1 n + d_2$$

an, die bis auf einen Fixkostenanteil proportional zum Prüfumfang angenommen werden können. Auch für die Entscheidungsfolgekosten wählt man der Einfachheit wegen lineare Ansätze bzgl. des Ausschußanteiles  $p$ :

$$\begin{aligned} \text{Losannahme:} \quad v_1(p) &= a_1 p + b_1 \\ \text{Losablehnung:} \quad v_2(p) &= a_2 p + b_2 \end{aligned}$$

Nach der obigen Feststellung ist die Losannahme umso "teurer", je höher der Ausschußanteil ist; umgekehrt sinken dabei die Kosten für die Losablehnung, also gilt  $a_2 < 0 < a_1$ . Weiters ist bei 100% guter Qualität ( $p = 0$ ) die Annahme der Ablehnung vorzuziehen, also muß  $b_1 < b_2$  gelten. Schließlich wird bei 100% schlechter Qualität ( $p = 1$ ) die Ablehnung günstiger sein, sodaß  $a_2 + b_2 < a_1 + b_1$  angenommen werden muß. Eine Entscheidungsgrundlage bilden nun die *erwarteten*, d.h. durchschnittlichen Kosten (= *Verlust*)

$$\begin{aligned} V_{n,c}(p) &= K_{Pr}(n) + v_1(p) \cdot \Pr(\text{"Losannahme"}|p) + \\ &\quad v_2(p) \cdot \Pr(\text{"Losablehnung"}|p) \\ &= K_{Pr}(n) + v_2(p) + [v_1(p) - v_2(p)] \sum_{l=0}^c \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \end{aligned}$$

Für die Auswahl von  $n$  und  $c$  ist die Minimierung des Verlustes entscheidend. Naheliegender wäre zunächst der *Minimax*-Ansatz, wobei die Stichprobenvorschrift so zu wählen wäre, daß das *Maximum* des Verlustes *minimal* ausfällt. Dabei würde auf Grund obiger Kostenstruktur (siehe auch Abb. 6) häufig die Losablehnung das Verlustmaximum minimieren. Eine Abschwächung dieses rigorosen Prinzips minimiert das Maximum des *unvermeidlichen* Verlustes (*Regret-Funktion*)

$$R_{n,c}(p) = V_{n,c}(p) - \min\{v_1(p), v_2(p)\}$$

Dieser Ansatz (siehe Uhlmann, 1970, oder Collani, 1984) ist nicht ganz so pessimistisch wie die reine Minimax-Strategie; da aber das Maximum von  $R_{n,c}(p)$  über dem gesamten Bereich  $0 \leq p \leq 1$  betrachtet und minimiert wird, berücksichtigt dieses Verfahren eher übervorsichtig auch wenig realistische Möglichkeiten ( $p$  ist in der Regel klein!) und löst das Problem auch eher aus der Sicht eines *Pessimisten*.

Im Bayes-Kalkül macht man sich die in der Regel vorhandene Vorinformation zunutze, die in Form einer in der Qualitätsgeschichte aufgezeichneten *Prozeßkurve* ( $\hat{=}$  a-priori-Dichte)  $\pi(p)$  den Ausschußanteil  $p$  beschreibt. Damit wird die optimale Wahl  $n^*$  und  $c^*$  so getroffen (siehe Fitzner, 1979), daß der auf Grund der Vorinformation *erwartete* Verlust, das sogenannte *Bayes'sche Risiko*, minimal ausfällt:

$$\int_0^1 V_{n^*,c^*}(p) \pi(p) dp = \min_{n,c} \int_0^1 V_{n,c}(p) \pi(p) dp .$$

Diese Form der Auswahl eines optimalen Prüfplanes orientiert sich an der Erfahrung und spiegelt somit eine realistischere Haltung wider.

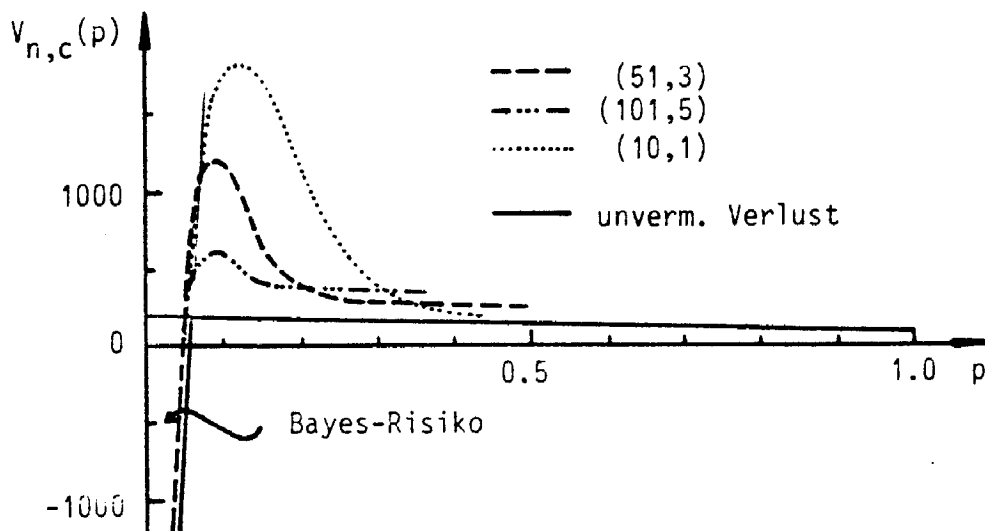
*Beispiel 4.1:* gegeben sind die Kostenparameter

Annahme:	$a_1 = 90000$	$b_1 = -5000$
Ablehnung:	$a_2 = -100$	$b_2 = 200$
Stichprobe:	$d_1 = 2$	$d_2 = 20$

Außerdem ist die Prozeßkurve für den Ausschußanteil  $p$  bekannt. Sie besitzt symmetrische Dreiecksgestalt über dem Intervall  $(0,0.1)$ . Wie lauten der optimale Bayes-Plan und der optimale Uhlmann-Plan?

Die Abbildung 6 zeigt den Verlauf der Verlustfunktion für einen  $(10,1)$ -Plan, einen  $(51,3)$ -Plan (optimaler Bayes-Plan) und einen  $(101,5)$ -Plan (optimaler Uhlmann-Plan). Das hierzu verwendete PASCAL-Programm für PC wird vom Autor gerne zur Verfügung gestellt.

Abbildung 6: Verlustfunktion für  $(n,c)$ -Plan



In der Prozeßregelung treten ähnliche Kostenfaktoren auf wie in der Losprüfung:

- *Prüfkosten.*



- Kosten für (unnötige) *Prozeßunterbrechung*.  
Darunter fallen u.a. Wartungs- und Reparaturkosten sowie die Kosten für den Produktionsausfall.
- Kosten für *Fehlproduktion*.  
Sie umfassen den (sinnlosen) Materialaufwand sowie den Produktionsausfall für den Zeitraum der Fehlproduktion.

Für eine optimal gestaltete Qualitätsregelkarte sind daher

- Prüfintervall
- Stichprobenumfang
- Entscheidungsregel

in ein ausgewogenes Verhältnis bezüglich der oben erwähnten Kostenfaktoren zu bringen. Beispiele dafür finden sich etwa bei Collani (1981), Rinne (1981), Arnold (1987) oder Bergmann (1987).

Zum Abschluß sei noch die Bestimmung eines optimalen Prüfintervalles für eine konkrete Prozeßsituation dargelegt, wobei der Prüfumfang und die Entscheidungsregel vereinfachend als gegeben angenommen werden sollen. Ist  $T$  die Intaktzeit des Prozesses,  $t_0$  das (konstante) Prüfintervall und werden die Kosten für einen Prüfvorgang mit  $A$  und die für die Fehlproduktion je Zeiteinheit mit  $B$  bezeichnet, so gilt für die Gesamtkosten offensichtlich

$$K(t_0) = M A + (M t_0 - T) B \quad .$$

Dabei steht  $M = \lceil T/t_0 \rceil + 1$  für die Anzahl von Prüfvorgängen, die bis zum Auftreten und Erkennen eines Prozeßfehlers erfolgen, wobei ein irrtümliches Übersehen eines Fehlers aus Vereinfachungsgründen ausgeschlossen sein möge. Häufig wird die Intaktzeit exponentialverteilt angenommen, also

$$\Pr(T \geq t|\tau) = e^{-t/\tau} \quad \text{für } t > 0 \quad ,$$

sodaß sich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der (zufallsbeeinflussten) Anzahl  $M$  von Prüfvorgängen

$$\begin{aligned} \Pr(M = 1|\tau) &= \Pr(T < t_0|\tau) = 1 - e^{-t_0/\tau} \\ \Pr(M = 2|\tau) &= \Pr(t_0 \leq T < 2t_0|\tau) = e^{-t_0/\tau} - e^{-2t_0/\tau} \\ &= e^{-t_0/\tau} (1 - e^{-t_0/\tau}) \\ \Pr(M = 3|\tau) &= e^{-2t_0/\tau} (1 - e^{-t_0/\tau}) \quad , \end{aligned}$$

bzw. allgemein

$$\Pr(M = m|\tau) = e^{-(m-1)t_0/\tau} (1 - e^{-t_0/\tau})$$

für natürliche Zahlen  $m$  ergibt. Damit ist  $T$  geometrisch  $G(p)$  verteilt mit  $p = 1 - e^{-t_0/\tau}$ .

Als Entscheidungsgrundlage dienen abermals die durchschnittlichen Kosten, wobei diese meistens auf die mittlere Prozeßfunktionsdauer  $\tau$  bezogen werden. Damit ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} E(K(t_0|\tau)) &= A \cdot E(M|\tau) + B \cdot [t_0 E(M|\tau) - E(T|\tau)] \\ &= A \cdot \frac{1}{1 - e^{-t_0/\tau}} + B \cdot \left( \frac{t_0}{1 - e^{-t_0/\tau}} - \tau \right) \end{aligned}$$

diese Verlustfunktion  $V(t_0; \tau)$  zu

$$V(t_0; \tau) = \frac{E(K(t_0|\tau))}{\tau} = \frac{A}{t_0} \cdot \frac{t_0/\tau}{1 - e^{-t_0/\tau}} + B \left( \frac{t_0/\tau}{1 - e^{-t_0/\tau}} - 1 \right) .$$

Diese gilt es nun durch entsprechende Wahl des Prüfintervalles  $t_0$  bezüglich eines geeigneten Kriteriums zu minimieren. Wie man sich relativ leicht überzeugen kann, strebt die obige Verlustfunktion für  $\tau \downarrow 0$  und für  $\tau \uparrow \infty$  gegen  $\infty$ , so daß der Minimax-Ansatz ohne (willkürliche ?) Einschränkung des Bereiches für  $\tau$  ungeeignet ist. Währenddessen geht eine Bayes-Lösung  $t_{0, \text{Bayes}}$  von vorhandener Vorinformation über die durchschnittliche Prozeßlaufzeit  $\tau$  aus, die als a-priori-Dichte  $\pi(\tau)$  vorliegt, und minimiert den *erwarteten* Verlust

$$E_{\pi(\tau)}(V(t_{0, \text{Bayes}}|\tau)) = \min_{t_0} E_{\pi(\tau)}(V(t_0|\tau)) .$$

Wie bei den Prüfplänen orientiert sich auch hier die Entscheidung an der Erfahrung (= Vorinformation). Zusätzlich bietet der Bayes-Ansatz die Möglichkeit, von Zeit zu Zeit die a-priori-Verteilung durch die Prüfergebnisse zu einer a-posteriori-Verteilung über  $\tau$  zu aktualisieren und anschließend mit dieser eine allfällige Modifizierung des Prüfintervalles in gleicher Weise vorzunehmen.

*Beispiel 4.2:* Wie lautet für  $A = 20$  und  $B = 10$  die Bayes-Lösung, wenn als a-priori-Verteilung für die durchschnittliche Prozeßlaufzeit  $\tau$  eine symmetrische Dreieckverteilung im Intervall (500, 700) angenommen wird?

Für die Lösung bieten sich Programme zur nichtlinearen Optimierung an. Zu beachten ist, daß die notwendige Integration nur näherungsweise erfolgen kann. Ein PASCAL-Programm für PC stellt der Autor gerne zur Verfügung. Für die obige Situation ergibt sich  $t_{0, \text{Bayes}} = 48$ .

## Literatur

- B.F. Arnold (1987): *Minimax-Prüfpläne für die Prozeßkontrolle*, Physica-Verlag, Heidelberg.
- B. Bergman (1987): On an Improved Acceptance Control Chart, in Lenz & al. (eds.): *Frontiers in Statistical Quality Control*, Physica-Verlag, Würzburg/-Wien, 154-162.

- E. v. Collani (1981): Kostenoptimale Prüfpläne für die laufende Kontrolle eines normalverteilten Merkmals, *Metrika*, 28, 211-236.
- E. v. Collani (1984): *Optimale Wareneingangskontrolle*, Teubner-Verlag, Stuttgart.
- D. Fitzner (1979): *Adaptive Systeme einfacher kostenoptimaler Stichprobenpläne*, Reihe Arbeiten zur Angewandten Statistik (Heft 21), Physica-Verlag, Würzburg.
- H. Rinne (1981): Cost Minimal Process Control, in Lenz-Wetherill-Wilrich (eds.): *Frontiers in Statistical Quality Control* Physica-Verlag, Würzburg/Wien, 227-241.
- H. Strelec (1989): *Statistische Qualitätskontrolle*, Vorlesungsskriptum, Institut für Statistik der TU Wien.
- W. Uhlmann (1970): *Kostenoptimale Prüfpläne*, Physica-Verlag, Würzburg/Wien.
- W. Uhlmann (1982): *Statistische Qualitätskontrolle*, 2. Aufl., Teubner-Verlag, Stuttgart.